*CONTRIBUTO ESTESO Convegno PLS-G6*

Il Carosello Trigonometrico: una proposta didattica interdisciplinare per il biennio dei Licei

*The Trigonometric Carousel: an educational interdisciplinary proposal for the first two years of Secondary School*

**Roberto DE LUCA**1**, Orazio FAELLA**2 **e Giulia MONETTI**1

1*Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Salerno.*

2*Affiliazione al Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Salerno*

e-mail di riferimento: [rdeluca@unisa.it](mailto:rdeluca@unisa.it)

**Abstract** Si propone, come percorso didattico interdisciplinare, il materiale di un lavoro di ricerca storica trasversale tra la Matematica del 1500 e la fisica dei pendoli. Il punto di partenza è il pendolo, argomento dei programmi di formazione della scuola secondaria; il focus è, invece, la sua evoluzione in un più complesso dispositivo, cioè il pendolo tronco conico (carosello trigonometrico).

The educational proposal in the present work embodies an historical research work on the Mathematics of 1500’s and the physical properties of pendula. This interdisciplinary topic is centred on the study of the simple and conic pendula, which are part of secondary school training programs; the focus is, on the other hand, the evolution of these systems into a more complex device, namely, the trigonometric carousel.

1. Introduzione

Il pendolo semplice è notoriamente l’argomento di meccanica più *gettonato* in tutti i corsi di Fisica delle Scuole Superiori di secondo grado [1]: nei bienni degli Istituti Tecnici, così come nei corsi ad indirizzo liceale fino ad arrivare al corso di Scienze Integrate nel primo anno degli Istituti Professionali. Pertanto, proponiamo di utilizzarlo come argomento *apripista* per una trattazione *tipica* di un argomento di fisica ma differenziata nel percorso didattico dall’esplorazione delle varie trasformazioni che può avere il dispositivo semplice, il tutto mirando ad una comprensione autentica della realtà che circonda gli studenti.

Nella scuola secondaria, infatti, si propone spesso un percorso alla scoperta iniziale del pendolo semplice per studenti del biennio, e del pendolo conico per studenti degli anni successivi al biennio dei Licei. In alcuni corsi di laboratorio di fisica, poi, la misura del periodo di oscillazione di un pendolo semplice viene misurata per la determinazione della costante di gravità . Quindi resta un argomento dalle mille facce, dai mille utilizzi e ben noto agli studenti. La sua trattazione è, quindi, l’occasione per affrontare *sorprendenti risultati* *scientifici* [2] come l’indipendenza del periodo di oscillazione dalla massa o l’indipendenza del tempo di caduta di un grave dalla massa. E resta, inoltre, un argomento cardine per acquisire conoscenze e idee di natura più scientifica.

In questo lavoro, pertanto, proponiamo il percorso didattico consistente in una evoluzione del pendolo semplice [3][4] in conico [5] e, successivamente, in un’altra modifica nel pendolo tronco conico [6] (carosello trigonometrico o giostra trigonometrica). Questo sistema è stato già dettagliatamente trattato in un lavoro precedente degli stessi Autori [6]. È stato sorprendente scoprire come un oggetto così semplice potesse celare non comuni meraviglie matematico-scientifiche. L’interdisciplinarità della trattazione rende questo percorso didattico interessante e riutilizzabile, soprattutto alla luce delle recenti novità introdotte nella seconda prova scritta dell’esame di maturità. Inoltre, i *futuri* studenti universitari potrebbero approfondire già dalle superiori le tecniche di risoluzione delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado. Infine, il diverso comportamento dei due sistemi fisici studiati, all’apparenza molto simili, potrebbe destare l’interesse dei docenti per ulteriori applicazioni ad altri dispositivi studiati nei corsi di Fisica.

1. Descrizione del percorso didattico proposto



Il percorso didattico in esame prevede (successivamente alla trattazione del pendolo semplice e del pendolo conico) di dare inizio allo studio del sistema meccanico in fig.1 composto da due masse puntiformi , sospese a fili inestensibili, privi di massa e di lunghezza , agganciati ad un braccio di lunghezza *r*. Le masse *m* compiono, così, un moto circolare con raggio:

, (1)

ove è l'angolo che il filo forma con la verticale. Con il diagramma di corpo libero per ciascuna massa puntiforme sulla giostra applicato alla fig. 1, si scrive il secondo principio della dinamica e si prosegue alla ricerca del moto del pendolo tronco conico arrivando all’equazione:

(2)

Figura 1: Schema del carosello trigonometrico

.

, 1.0 (curva viola)

contenente i due parametri adimensionali del carosello trigonometrico,

; (3)

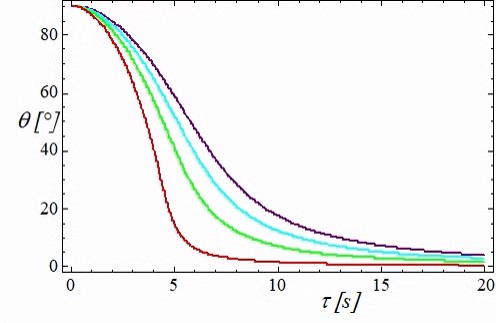
Dall’equazione (2) si ricava [6]:

, (4)

ove . Per ricavare la soluzione (4) nella variabile , da un lato si ripercorre un pezzo di storia della Matematica [6-7], dall’altro si può far uso dei software disponibili (Mathematica, Geogebra, Excel) modellandoli a seconda delle proprie esigenze di calcolo. Pertanto, nel presente percorso didattico possono essere inclusi argomenti tecnico-scientifici inerenti a discipline differenti dalla Fisica.

Prima di pervenire alla soluzione della (4), si potrebbe proporre un utile dibattito con gli studenti per far emergere considerazioni sull’importanza della *accettabilità e plausibilità* delle soluzioni da ricercare quando si ripercorrono le tappe per la soluzione di un problema di fisica. Per esempio, si potrebbe mettere in luce che la (4) ha soluzioni accettabili per qualsiasi positivo compreso tra e 90°, oppure che la giostra trigonometrica non presenta una frequenza di soglia, diversamente dal pendolo conico, in cui, affinché il filo si alzi durante la rotazione, la velocità angolare deve superare il valore di . Per quanto riguarda quest’ultima particolarità del pendolo conico, si può far immediatamente vedere agli studenti che la (2) non ammette la soluzione per .

Dopo le discussioni sulle soluzioni attese corrispondenti all’osservazione del fenomeno reale gli studenti possono procedere verso la soluzione per della (4), che si riduce alla ricerca delle radici della equazione algebrica di quarto grado in ricavata utilizzando in maniera articolata e laboriosa il metodo di Ferrari (1522 -1565) [6]. Altro punto di forza della trattazione è il vantaggio e l’opportunità di mostrare come sia utile introdurre parametri adimensionali nei problemi del moto in fisica. Nel caso in esame, infatti, tali parametri rendono evidente in che modo il sistema dipenda dalle caratteristiche geometriche e da quelle dinamiche, oltre a risparmiare l’associazione di unità di misura alle grandezze dell’Eq. (4).

Infine, come già evidenziato, il percorso didattico prevede di ricorrere all’utilizzo delle TIC nella ricerca della soluzione indicata, ossia che la soluzione possa essere trovata attraverso lo studio dell’andamento della (3) in forma di ricerca degli zeri di una funzione in (si vedano i dettagli in [6]). Cosicché le soluzioni possono essere rappresentate in forma grafica come nella fig. 2, dove si riportano i valori di che si hanno in corrispondenza del periodo di rotazione della giostra per e per variabili valori di : (curva violetta); (curva ciano); (curva verde); (curva rossa). Si può far notare agli studenti che in fig. 2 tutte le curve convergono al valore per piccoli valori di , ossia, per alti valori di . Di contro, per alti valori di , le curve si adagiano asintoticamente sulla retta orizzontale . Queste peculiarità *agganciano* lo studente alla realtà del fenomeno osservabile con il dispositivo esaminato.

L’ideale resta, poi, realizzare materialmente un pendolo alla fine del percorso didattico proposto; dispositivo che da conico possa divenire un pendolo trigonometrico attraverso l’inserimento di un braccetto allungabile e inizialmente di lunghezza trascurabile rispetto alla lunghezza del filo a cui è sospesa la massa pendolare.

Figura 2: Angolo di inclinazione dei fili del carosello trigonometrico in funzione del periodo di rotazione per 4,5 m e per i seguenti valori di : 6,5 m (violetto); 4,5 m(ciano); 2,5 m(verde); 0,5 m(rosso).

In ogni caso, il percorso didattico dovrebbe partire dal considerare lo studio delle proprietà del sistema e arrivare, fedelmente a questa trattazione, a trasformare l’equazione del moto, in maniera ingegnosa, in una equazione algebrica di quarto grado nella variabile . I passaggi consigliati sarebbero:

* effettuare dapprima un’analisi principalmente basata sullo studio della funzione di quarto grado in i cui zeri determinano le soluzioni del problema;
* successivamente, partendo proprio dall’equazione ottenuta per il carosello trigonometrico, illustrare il metodo di Ferrari [6-7] per la risoluzione delle equazioni algebriche di quarto grado.
* illustrare, infine, i risultati in forma grafica.

1. Discussione

Abbiamo notato che esistono similitudini molto spiccate tra il carosello trigonometrico e il pendolo conico. Infatti, il primo può essere visto come una variante del secondo, al quale ci si può ricondurre nel limite . Tuttavia, nel caso del carosello trigonometrico l’angolo , che i fili di un carosello trigonometrico fanno con la verticale, sono ottenibili solo attraverso la risoluzione di un’equazione algebrica di quarto grado che dipende dai parametri adimensionali e , ove è la velocità angolare del carosello stesso. Pertanto, la discussione di questo problema è utile, nel potenziamento delle competenze logico-matematiche, far notare che in entrambi i pendoli, conico e trigonometrico, l’espressione che determina l’angolo è un’equazione trigonometrica:

* di semplice risoluzione nel caso del pendolo conico;
* di soluzione più articolata nel caso del carosello trigonometrico, poiché l’angolo viene determinato attraverso la soluzione di un’equazione algebrica di quarto grado nella variabile .

Ed è proprio in merito alla risoluzione dell’equazione algebrica, che vengono adottati i descritti due modi di procedere diversi. In un caso si può effettuare un’analisi euristica, principalmente basata sullo studio di curve algebriche, ottenute numericamente e rappresentanti la funzione di quarto grado in , data dal primo membro dell’Eq. (4), i cui zeri determinano le soluzioni al problema. Si può così determinare l’angolo in corrispondenza di differenti valori del periodo di rotazione della giostra. Nell’altro caso, invece, può essere proposto il metodo di Ferrari per la risoluzione matematica dell’equazione algebrica di quarto grado ottenuta, includendo, nei vari passaggi, la dipendenza dai due parametri adimensionali e . La soluzione del problema è illustrata in termini degli stessi parametri e .

Dalla soluzione del problema del pendolo conico e del pendolo trigonometrico risulta che, mentre nel primo è necessario superare un valore di soglia della frequenza per ottenere valori non-nulli dell’angolo di inclinazione del filo (soglia che coincide proprio con la pulsazione del pendolo semplice ), nel secondo sistema, invece, si hanno valori positivi di per qualsiasi .

Dal punto di vista laboratoriale-materiale, si potrebbe costruire in laboratorio un semplice sistema rotante a varie velocità angolari in modo da visualizzare le differenze tra i due sistemi studiati: il pendolo conico e il carosello trigonometrico. Il modello si potrebbe costruire con due bracci laterali incernierati in un punto sull’asse di rotazione, che sorreggano un’asta orizzontale di lunghezza regolabile, così come mostrato in fig.1. Smontando l’asta regolabile e facendo coincidere i punti e , il carosello trigonometrico si trasformerebbe in un pendolo conico avente due punti materiali sospesi. In questo modo, la necessità di giungere alla soluzione di un problema concreto, verificabile sperimentalmente attraverso il sistema in fig.1, potrebbe giustificare lo sforzo richiesto agli studenti per risolvere un’equazione algebrica di quarto grado.

1. Conclusioni

Partendo dalle ben note proprietà di un pendolo semplice e di un pendolo conico, si può creare un dispositivo più complesso quale il carosello trigonometrico e condurre un percorso didattico *arricchito* di contenuti storici e matematici e che, utilizzando le leggi della dinamica, illustri lo studio del comportamento del suddetto dispositivo, cioè un pendolo in cui il punto di sospensione del filo di lunghezza non è posto sull’asse di rotazione, ma è disposto, rispetto ad esso, a una distanza . In particolare, la sequenza di proposte “pendolo conico” seguito da “carosello trigonometrico” serve ad agevolare la scrittura delle equazioni della dinamica e a sottolineare l’importanza dei differenti comportamenti dei due sistemi.

La valenza didattica del presente lavoro è duplice perché se, da un lato, allo studente vengono presentati le similitudini dei vari sistemi fisici (i differenti pendoli), dall’altro si mostra come tali sistemi richiedano tecniche di analisi molto diverse tra loro per arrivare alle soluzioni del moto. Le caratteristiche che differenziano i sistemi “pendolo conico” e “carosello trigonometrico” (la presenza, o meno, di una frequenza di soglia di rotazione per sollevare il braccio) possono essere messe in evidenza da una costruzione di un modello meccanico suggerito nel presente lavoro.

***Bibliografia:***

[1] Gregory L., Baker G. L. e Blackburn J. A., *The Pendulum: A Case Study in Physics*

(Oxford University Press Inc., New York) 2005.

[2] Garcıa Trujillo L. A., Ramırez Diaz M. H. e Rodrıguez Castillo M., “Misconceptions of

Mexican Teachers in The Solution of Simple Pendulum”, *Eur. J. Phys. Ed*., **4** (2013) 17.

[3] Resnick R., Halliday D. e Krane K., *Fisica 1* **(**Casa Editrice Ambrosiana, Milano) 2003.

[4] Mazzoldi P., Nigro M. e Voci C., *Fisica, Vol.* ***I*** *(Meccanica - Termodinamica)* (EdiSES,

Napoli) 1998.

[5] Mencuccini C. e Silvestrini V., *Fisica 1 (Meccanica - Termodinamica)* (Liguori Editore,

Napoli) 1995.

[6] De Luca R., Faella O., Monetti G., “Il Carosello Trigonometrico”, *Giornale di Fisica SIF*, **vol.3** (07-09 2019)

[7] Boyer C., *Storia della matematica* (ed.Mondadori, Milano) 1990.